ПИСМЕНИ ИСПИТ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА

22. септембар 2017

Професор: Бојан Башић

1. Доказати да, за $m > 1$, не постоји низ од 2^m узастопних природних бројева који сви имају тачно по m простих фактора, рачунајући и вишеструкост.

   Једна идеја: Искористити чињеницу да међу 2^m узастопних бројева мора постојати број дељив са 2^m.

2. Ако је a паран број, доказати да за све природне бројеве m важи

$$(a+1)^m \mid a^{(a+1)^{m-1}} + 1.$$

   Једна идеја: Радити индукцијом по m. Приликом спровођења индуктивног корака (тј. доказивања дељивости $(a+1)^{m+1} \mid a^{(a+1)^m} + 1$ под претпоставком $(a+1)^m \mid a^{(a+1)^{m-1}} + 1$), записати најпре

$$a^{(a+1)^m} + 1 = \left(a^{(a+1)^{m-1}}\right)^{a+1} + 1^{a+1},$$

   па овај израз раставити на производ два чиниоца, од којих на први треба применити индуктивну хипотезу, а за други је могуће доказати да је дељив са $a+1$.

3. Нека је p прост број, и нека за неке целе бројеве a и b важи $p = a^2 + 4b^2$. Доказати да a мора бити квадратни остатак по модулу p.

   Једна идеја: Искористити Закон квадратне реципрочности.

4. Доказати да $n!$ никада није потпун квадрат за $n > 1$.

   Једна идеја: Применом Бертрановог постулата доказати да у простој факторизацији броја $n!$ увек постоји прост број чији је експонент једнак 1.